

УДК 533.6.011

## ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ В ГАЗЕ ЧАПЛЫГИНА

*Е.М. Котляр, Д.В. Маклаков*

### Аннотация

Решена задача о безотрывном обтекании профиля заданной формы дозвуковым потоком газа. Задача сведена к нелинейному интегральному уравнению типа уравнения Вилла, которое после дискретизации решено численно методом Ньютона. Показано, что распределения скоростей, рассчитанные по модели газа Чаплыгина, по формуле Кармана – Дзяна и с помощью CFD пакета Fluent, в дозвуковом диапазоне чисел Маха очень близки.

**Ключевые слова:** дозвуковые течения, уравнения Чаплыгина, газ Чаплыгина, уравнение Вилла, дискретизация, метод Ньютона.

---

### Введение

Один из приближенных методов учета сжимаемости базируется на линейных уравнениях газовой динамики, записанных в плоскости годографа скорости – уравнениях Чаплыгина [1]:

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\bar{\rho}\lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi$  – потенциал течения,  $\psi$  – функция тока,  $\lambda$  и  $\theta$  – модуль и угол наклона вектора приведенной скорости (скорости, отнесенной к критической скорости звука  $a^*$ ),  $\bar{\rho}$  – безразмерная плотность, отнесенная к плотности  $\rho_0$  в точке торможения потока. При этом если  $\lambda_x$  и  $\lambda_y$  – компоненты вектора скорости  $\vec{\lambda}$ , то

$$\lambda_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \lambda_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \lambda_x = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \lambda_y = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Уравнения (1) являются следствием соотношения

$$dz = \left( \frac{d\varphi}{\lambda} + i \frac{d\psi}{\bar{\rho}\lambda} \right) e^{i\theta},$$

которое вытекает из равенств (2).

С.А. Чаплыгин [1] предложил два метода решения системы (1): точный и приближенный. Точный метод может быть применен к достаточно широкому классу задач о течениях сжимаемой жидкости, ограниченных свободными поверхностями и полигональными твердыми стенками. Обзор работ, выполненных в этом направлении, можно найти в монографиях [2, 3].

Приближенный метод Чаплыгина применим при решении как прямых, так и обратных задач теории аэропрофилей. Решение и условия разрешимости обратной

задачи в приближении газа Чаплыгина даны Г.Г. Тумашевым [4, 5] (см. также [6]), Вудсом ([7, п. 6]).

Прямые задачи, когда форма профиля задается, являются более сложными, чем обратные. Здесь явного аналитического представления решения получить не удастся, либо строится приближенное аналитическое решение [8], либо предлагается итерационная процедура, сходимость которой исследовать весьма затруднительно. В частности, такая процедура представлена в [9], но авторы ограничились расчетом только симметричного профиля NASA 0012.

В настоящей работе, используя приближенный метод Чаплыгина, мы сводим решение задачи об обтекании произвольного профиля дозвуковым потоком газа к нелинейному уравнению типа уравнения Вилла [2]. После дискретизации это уравнение решается методом Ньютона. Численные эксперименты показали, что метод сходится для профилей любой формы всего за несколько итераций. Полученные распределения скоростей сравнивались с распределениями, найденными в CFD пакете Fluent, а также с хорошо известной формулой Кармана – Дзяна [8]. Установлено, что в дозвуковом диапазоне чисел Маха все три подхода дают весьма близкие результаты.

### 1. Модель газа Чаплыгина

Приближенный метод С.А. Чаплыгина состоит в аппроксимации адиабатической зависимости

$$\bar{p} = \bar{\rho}^\kappa \quad (3)$$

в плоскости  $(1/\bar{\rho}, \bar{p})$  прямой линией: вместо (3) используется уравнение

$$\bar{p} = -\frac{A}{\bar{\rho}} + B, \quad (4)$$

где  $\kappa$  – показатель адиабаты (для воздуха  $\kappa = 1.4$ ),  $\bar{p} = p/p_0$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$  – безразмерные давление и плотность, отнесенные к давлению  $p_0$  и плотности  $\rho_0$  в точке торможения потока,  $A > 0$  и  $B$  – постоянные. Газ, в котором связь между давлением и плотностью задается уравнением (4), называют газом Чаплыгина.

Уравнение Бернулли

$$\frac{V^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0,$$

где  $V$  – скорость, с учетом равенств

$$a_0^2 = \frac{\kappa p_0}{\rho_0}, \quad \frac{a_0^2}{a_*^2} = \frac{\kappa + 1}{2}$$

( $a_0$  – скорость звука в точке торможения,  $a_*$  – критическая скорость звука) приводится к виду

$$\lambda^2 + \frac{\kappa + 1}{\kappa} \int_1^{\bar{p}} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} d\bar{\rho} = 0. \quad (5)$$

Подставив (4) в (5), после интегрирования получим

$$\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4c^2\lambda^2}}, \quad c^2 = \frac{\kappa}{2A(\kappa + 1)} > 0, \quad (6)$$

причем результат интегрирования не зависит от величины параметра  $B$ . Если теперь подставить (6) в систему (1) и сделать замену

$$\lambda(S) = \frac{\exp(S)}{1 - c^2 \exp(2S)}, \quad (7)$$

то вместо (1) получим условия Коши–Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi}{\partial S}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial S} = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (8)$$

При этом комплексный потенциал  $w = \varphi + i\psi$  будет аналитической функцией переменной  $\chi = S - i\theta$ . Переход в физическую плоскость осуществляется по формуле

$$dz = \exp(-\chi) dw - c^2 \overline{\exp(\chi)} dw \quad (9)$$

(черта означает комплексное сопряжение), которая следует из (2).

Введем новую комплексную переменную  $z_1 = x_1 + iy_1$ , связанную с  $w$  и  $\chi$  соотношением  $dz_1 = \exp(-\chi) dw$ . Область изменения этой переменной называют областью фиктивного течения несжимаемой жидкости. Тогда  $dw/dz_1 = \exp \chi$  – комплексно-сопряженная скорость фиктивного течения,  $\Lambda = \exp S$  – модуль этой скорости. Из формул (6) и (7) найдем

$$\lambda = \frac{\Lambda}{1 - c^2 \Lambda^2}, \quad \Lambda = \frac{2\lambda}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda^2}}, \quad \bar{\rho} = \frac{1 - c^2 \Lambda^2}{1 + c^2 \Lambda^2}. \quad (10)$$

Предположим теперь, что каким-то способом построена область течения несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности

$$\Lambda_\infty = \frac{2\lambda_\infty}{1 + \sqrt{1 + 4c^2 \lambda_\infty^2}}$$

и найден комплексный потенциал  $w$  течения в этой области. Тогда с помощью формулы (9) можно найти соответствующую область течения газа Чаплыгина и по первой и третьей из формул (10) построить поля скоростей и плотностей для этого газа. Наклон вектора скорости к вещественной оси, задаваемый углом  $\theta$ , в обоих потоках одинаков.

Выбор угла наклона прямой (4) или, что равнозначно, параметра  $c^2$  можно осуществлять различными способами (см., например, [10, с. 61]). С.А. Чаплыгин заменял адиабатическую зависимость  $\bar{p} = \bar{p}(1/\bar{p})$  касательной прямой, проведенной в точке  $\bar{p} = 1$ ,  $\bar{p} = 1$  торможения потока. В этом случае  $A = \kappa$  и  $c^2 = 1/[2(\kappa+1)]$ . Параметр  $c^2$  можно выбирать из условия наилучшей аппроксимации адиабатической зависимости

$$\bar{p} = \left[ 1 - \frac{\lambda^2 (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \right]^{1/(\kappa-1)} \quad (11)$$

между приведенной скоростью  $\lambda$  и безразмерной плотностью  $\bar{p}$  приближенной зависимостью (6). При таком выборе существует диапазон изменения скоростей  $\lambda$ . В частности, Г.Ю. Степанов (см. [11, п. 24]) предложил универсальное значение  $c^2 = 0.296$ . Расчеты показали, что при этом относительная погрешность формулы (6) по отношению к (11) в диапазоне  $0 < \lambda < 0.89$  составляет всего 2.3%. Если положить  $c = 0$ , то получится модель идеальной несжимаемой жидкости.

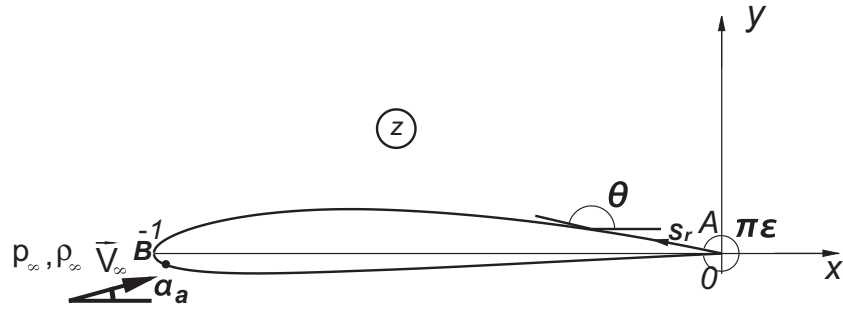


Рис. 1. Течение в физической плоскости (профиль NACA 2411)

## 2. Постановка задачи и сведение ее к нелинейному интегральному уравнению типа уравнения Вилла

Профиль обтекается дозвуковым потоком газа в плоскости  $z = x + iy$ . На бесконечности заданы скорость  $V_\infty$ , давление  $p_\infty$ , плотность  $\rho_\infty$  и угол наклона вектора скорости (угол атаки)  $\alpha_a$  (рис. 1).

Определим число Маха  $M_\infty$  на бесконечности. Для адиабатического течения квадрат скорости звука  $a_\infty^2 = \kappa p_\infty / \rho_\infty$ . Отсюда найдем

$$M_\infty^2 = \frac{V_\infty^2}{a_\infty^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{p_\infty}.$$

Пусть  $V$  – скорость потока,  $a_*$  – критическая скорость звука. Будем искать поле приведенных скоростей  $\tilde{\lambda} = \tilde{V}/a_* = \lambda_x + i\lambda_y$ . При заданных  $V_\infty$ ,  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  параметр  $a_*$  является физической константой, которую легко найти по известному числу Маха  $M_\infty$ . В дальнейшем будем считать, что  $M_\infty$  задано. Из адиабатического соотношения находим

$$\lambda_\infty = M_\infty \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2 + (\kappa - 1) M_\infty^2}}$$

и отсюда определяем  $a_* = V_\infty / \lambda_\infty$ .

Форма профиля задана уравнением

$$\theta = F(s_r), \quad 0 \leq s_r \leq L, \quad (12)$$

где  $\theta$  – угол наклона касательной к профилю,  $s_r$  – дуговая координата, отсчитываемая от острой кромки  $A$  против часовой стрелки,  $L$  – периметр профиля. На рис. 2 показана функция  $F(s_r)$  для профиля NACA 2411.

Точка  $B$  является точкой торможения потока,  $\epsilon\pi$  – внешний по отношению к профилю угол в острой кромке  $A$  ( $1 < \epsilon \leq 2$ ). Отметим, что резкие изменения угла наклона касательной  $\theta$  вблизи острой кромки, видимые на рис. 2, для этого профиля действительно имеют место.

Перейдем в область фиктивного течения несжимаемой жидкости  $z_1 = x_1 + iy_1$ . Пусть  $\tilde{\lambda} = \Lambda e^{i\theta}$  – вектор скорости фиктивного течения, а  $w$  – комплексный потенциал в этой области. Тогда  $\frac{dw}{dz_1} = \Lambda e^{-i\theta}$  – комплексно-сопряженная скорость фиктивного течения. Для нахождения поля приведенных скоростей реального течения будем использовать формулы (10), где параметр  $c^2$  выберем равным универсальному значению Г.Ю. Степанова  $c^2 = 0.296$ .

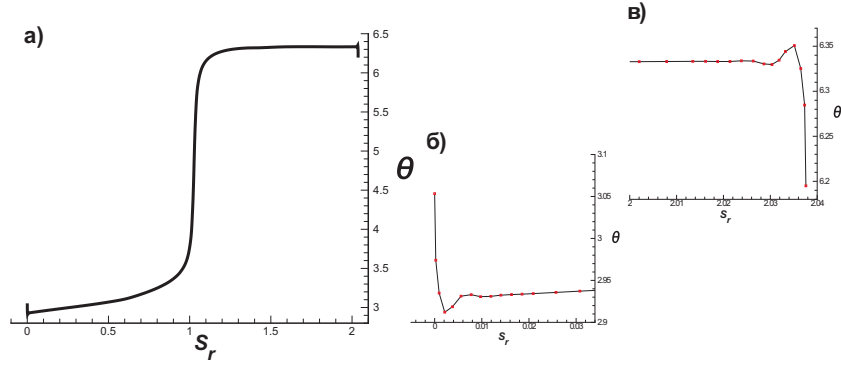


Рис. 2. Функция  $\theta = F(s_r)$  для профиля NACA 2411 (а); поведение функции  $\theta = F(s_r)$  у задней кромки верхней части профиля (б) и нижней части профиля (в)

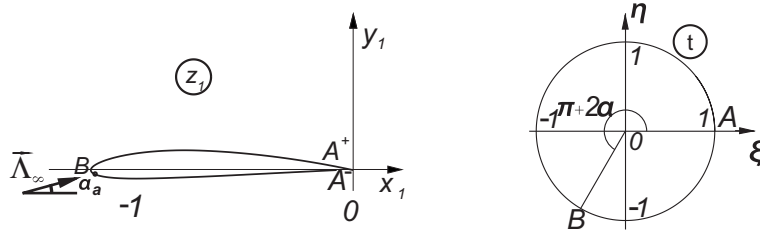


Рис. 3. Область фиктивного течения и каноническая область

Будем искать конформное отображение  $z_1 = z_1(t)$  внешности единичной окружности в плоскости  $t = \xi + i\eta$  на внешность профиля в области фиктивного течения с условиями  $z_1(\infty) = \infty$ ,  $\lim_{\gamma \rightarrow 0+} z_1(e^{i\gamma}) = 0$  (рис. 3).

В плоскости фиктивного течения профиль будет разомкнутым: точке  $A$  в плоскости  $z_1$  соответствуют две точки  $A^+$  и  $A^-$ , с которых сходят две конгруэнтные линии тока, простирающиеся до бесконечности (как в схеме Ву [2]). В самом деле, функция  $dz_1/dt$  является аналитической, поэтому все интегралы от этой функции по замкнутым контурам, охватывающим единичный круг в плоскости  $t$  будут равны между собой. Поэтому линия тока в плоскости  $t$ , отходящая от точки  $A$ , превратится в две конгруэнтные линии в плоскости  $z_1$ . Так как вдоль линий тока выполняется равенство ([13, с. 25])

$$dz = (1 - c^2 \Lambda^2) dz_1, \quad (13)$$

а профиль в физической плоскости  $z$  – замкнутый, то разомкнутость в плоскости  $z$  исчезает, и конгруэнтные линии тока в плоскости  $z_1$  переходят в одну линию в плоскости  $z$ .

Изменение величины  $\theta$  по всему контуру профиля  $\Delta\theta = F(L) - F(0)$ . Тогда имеет место соотношение  $\varepsilon = 3 - \frac{\Delta\theta}{\pi}$ .

Производную  $\frac{dz_1}{dt}$  будем искать в виде

$$\frac{dz_1}{dt} = U_0 \left( \frac{t-1}{t} \right)^{\varepsilon-1} e^{-\Phi(t)}, \quad (14)$$

где  $\Phi(t)$  – аналитическая функция, не имеющая особенностей в канонической области,  $U_0 = \left| \frac{dz_1}{dt}(\infty) \right|$  – постоянная, имеющая размерность длины.

На границе канонической области введем обозначения

$$\Phi(e^{i\gamma}) = \mu(\gamma) + i\tau(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi,$$

где  $\gamma$  – полярный угол. В предлагаемом методе искомой функцией является функция  $\tau(\gamma)$ , для определения которой мы выведем нелинейное интегральное уравнение. Если предположить, что  $\tau(\gamma)$  – известна, то тогда известна реальная часть аналитической функции  $-i\Phi(e^{i\gamma}) = \tau(\gamma) - i\mu(\gamma)$ . Последнюю можно восстановить с помощью формулы Шварца, а затем найти и

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \tau(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + t}{e^{i\gamma} - t} d\gamma, \quad (15)$$

причем здесь учтено, что  $U_0 = \left| \frac{dz}{dt}(\infty) \right|$ , и следовательно,  $\operatorname{Re} \Phi(\infty) = 0$ . Из (15) найдем, что связь между функциями  $\tau(\gamma)$  и  $\mu(\gamma)$  дается интегралом Гильберта:

$$\mu(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \beta}{2} d\gamma. \quad (16)$$

Теперь определим, как через функцию  $\tau(\gamma)$  выражаются функции  $\theta(\gamma)$  и  $s_r(\gamma)$ . Если в выражении (14) перейти на границу канонической области, то с учетом того, что

$$\frac{dz_1}{d\gamma} = \frac{dz_1}{dt} \frac{dt}{d\gamma} = \frac{dz_1}{dt} i e^{i\gamma},$$

получим

$$\frac{dz_1}{d\gamma} = U_0 \left( 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right)^{\varepsilon-1} \exp \left[ i \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) (\varepsilon - 1) + i \left( \frac{\pi}{2} + \gamma \right) - \mu(\gamma) - i\tau(\gamma) \right].$$

Отсюда выводим

$$\theta = \arg \frac{dz_1}{d\gamma} = \varepsilon \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma}{2} (3 - \varepsilon) - \tau(\gamma). \quad (17)$$

Комплексный потенциал в канонической области имеет вид

$$w(t) = \varphi_0 \left( e^{-i\alpha} t + \frac{e^{i\alpha}}{t} + 2i \sin \alpha \ln t \right),$$

где  $\alpha$  – теоретический угол атаки (угол атаки относительно линии нулевой подъемной силы), не совпадающий с истинным углом атаки  $\alpha_a$ ,  $\varphi_0$  – постоянная, имеющая размерность потенциала скорости. Тогда

$$\frac{dw}{dt} = \varphi_0 e^{-i\alpha} \frac{t-1}{t^2} \left[ t - e^{i(\pi+2\alpha)} \right], \quad (18)$$

Найдем  $\varphi_0$  и  $\alpha_a$ . Для этого запишем равенство  $\frac{dw}{dz_1} = \frac{dw/dt}{dz_1/dt} = \Lambda e^{-i\theta}$  на бесконечности, в выражениях (14), (15), (18) также устремим  $t$  к бесконечности. В результате получим

$$\varphi_0 = \Lambda_\infty U_0, \quad (19)$$

$$\alpha_a = \alpha - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\gamma) d\gamma. \quad (20)$$

При переходе на границу канонической области выражение (18) принимает вид

$$\frac{dw}{dt}(e^{i\gamma}) = -4\varphi_0 i e^{-i\gamma} \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) \sin\frac{\gamma}{2}. \quad (21)$$

Воспользуемся тем, что  $\left|\frac{dw}{dz_1}\right| = \left|\frac{dw/dt}{dz_1/dt}\right| = \Lambda(\gamma)$ , тогда, учитывая соотношения (14), (19) и (21), получаем

$$\Lambda(\gamma) = \frac{2\varphi_0}{U_0} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{2-\varepsilon} e^{\mu(\gamma)} \left|\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right)\right|.$$

Из выражения (13) следует, что

$$s_r = U_0 \left[ \int_0^\sigma \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\varepsilon-1} e^{-\mu(\gamma)} d\gamma - \right. \\ \left. - 4c^2 \Lambda_\infty^2 \int_0^\sigma \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{3-\varepsilon} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) e^{\mu(\gamma)} d\gamma \right]. \quad (22)$$

Подставив (17) и (22) в основное уравнение (12), задающее форму профиля, найдем нелинейное краевое условие, которое должно выполняться для аналитической функции  $\Phi(t)$  на параметрической окружности:

$$\varepsilon \frac{\pi}{2} + \gamma \left(\frac{3-\varepsilon}{2}\right) - \tau(\gamma) = F \left[ U_0 \left[ \int_0^\sigma \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\varepsilon-1} e^{-\mu(\gamma)} d\gamma - \right. \right. \\ \left. \left. - 4c^2 \Lambda_\infty^2 \int_0^\sigma \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{3-\varepsilon} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) e^{\mu(\gamma)} d\gamma \right] \right]. \quad (23)$$

Учитывая, что периметр данного профиля известен и равен  $L$ , получим условие для определения  $U_0$ :

$$L = U_0 \left[ \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{\varepsilon-1} e^{-\mu(\gamma)} d\gamma - \right. \\ \left. - 4c^2 \Lambda_\infty^2 \int_0^{2\pi} \left(2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^{3-\varepsilon} \cos^2\left(\frac{\gamma}{2} - \alpha\right) e^{\mu(\gamma)} d\gamma \right]. \quad (24)$$

Краевое условие (23) превращается в нелинейное интегральное уравнение типа уравнения Вилла [2], если учесть, что связь между функциями  $\tau(\gamma)$  и  $\mu(\gamma)$  дается линейным сингулярным оператором (16) с ядром Гильберта. Тогда (24) – нелинейное функциональное соотношение для определения параметра  $U_0$ . Кроме того, мы имеем интегральное соотношение (20) для отыскания теоретического угла атаки  $\alpha$ . Таким образом, задача сводится к решению системы (16), (20), (23), (24) относительно функции  $\tau(\gamma)$  и параметров  $U_0$ ,  $\alpha$ . Для дискретизации этой системы применялся метод, предложенный в [13] для расчетов кавитационного обтекания профилей.

### 3. Дискретизация системы уравнений

На отрезок  $[0, 2\pi]$  нанесем сетку узлов  $\gamma_i, i = 1, \dots, n; \gamma_1 = 0; \gamma_n = 2\pi$ . Нам потребуется дискретные аналоги линейного функционала

$$\int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma$$

и оператора Гильберта

$$\mu(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \beta}{2} d\gamma.$$

Пусть  $S_i(\gamma), i = 1, \dots, n$ , – система фундаментальных кубических сплайнов, построенная на сетке  $\gamma_i$  с граничными условиями типа “not-a-knot” [14]. Фундаментальный кубический сплайн  $S_i(\gamma)$  – это сплайн, значения которого во всех узлах равны 0, кроме узла с номером  $i$ , в котором  $S_i(\gamma_i) = 1$ . Системой фундаментальных сплайнов будем пользоваться для приближенного вычисления интегралов. Имеем

$$\lambda(\gamma) \approx \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i(\gamma), \quad \int_0^{\gamma_i} \lambda(\gamma) d\gamma \approx \sum_{j=1}^n \left( \int_0^{\gamma_i} S_j(\gamma) d\gamma \right) \lambda_j.$$

Тогда

$$\int_0^{\gamma_i} \lambda(\gamma) d\gamma \approx \sum_{j=1}^n A_{ij} \lambda_j, \quad \text{где} \quad A_{ij} = \int_0^{\gamma_i} S_j(\gamma) d\gamma.$$

Численно коэффициенты матрицы  $A_{ij}$  вычисляются следующим образом. Возьмем вектор  $\vec{\delta}_j = (0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$  (единица находится на  $j$ -том месте). На значениях этого вектора строим кубический сплайн  $S_j(\gamma)$  [14]. Интегрируем этот сплайн аналитически по рекуррентной формуле

$$A_{1j} = 0, \quad A_{i+1j} = A_{ij} + \int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}} S_j(\gamma) d\gamma, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Тем самым находим  $j$ -й столбец матрицы  $A_{ij}$ . Пусть  $a_j = A_{nj}, j = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\int_0^{2\pi} \lambda(\gamma) d\gamma \approx \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j. \quad (25)$$

Кроме того, с помощью фундаментальных сплайнов аналогичным образом построим матрицу для дифференцирования

$$\lambda'(\gamma_i) = \lambda'_i \approx \sum_{j=1}^n d_{ij} \lambda_j, \quad d_{ij} = S'_j(\gamma_i).$$

Оператор Гильберта дискретизируется формулой

$$\mu(\gamma_i) \approx \sum_{j=1}^n H_{ij} \lambda_j,$$



где  $H_{ij}$  – коэффициенты квадратной матрицы, которые находятся следующим образом.

Представим оператор Гильберта в виде

$$\mu(\beta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\lambda(\gamma) - \lambda(\beta)] \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \beta}{2} d\gamma$$

и учтем, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow \beta} [\lambda(\gamma) - \lambda(\beta)] \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma - \beta}{2} \right) = 2\lambda'(\beta).$$

Теперь подынтегральное выражение не содержит особенностей, и интеграл может быть вычислен по формуле (25). Приходим к следующим соотношениям.

Если  $i \neq 1$ ,  $i \neq n$ , то

$$\mu(\gamma_i) \approx -\frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n a_j \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma_j - \gamma_i}{2} \right) \lambda_j + 2a_i \sum_{j=1}^n d_{ij} \lambda_j - \lambda_i \sum_{j=1, j \neq i}^n a_j \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma_j - \gamma_i}{2} \right) \right].$$

Если  $i = 1$ , то

$$\mu(\gamma_1) \approx -\frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{j=2}^{n-1} a_j \operatorname{ctg} \frac{\gamma_j}{2} \lambda_j + 2a_1 \sum_{j=1}^n d_{1j} \lambda_j + 2a_n \sum_{j=1}^n d_{nj} \lambda_j - \lambda_1 \sum_{j=2}^{n-1} a_j \operatorname{ctg} \frac{\gamma_j}{2} \right].$$

В последней формуле учтено, что  $\lambda'(0) \neq \lambda'(2\pi)$ , а значит,

$$\lambda'(0) \approx \sum_{j=1}^n d_{1j} \lambda_j, \quad \lambda'(2\pi) \approx \sum_{j=1}^n d_{nj} \lambda_j.$$

Если  $i = n$ , то

$$\mu(\gamma_n) = \mu(\gamma_1)$$

в силу условия  $\mu(0) = \mu(2\pi)$ .

Собираем коэффициенты при  $\lambda_j$  в каждой строке с номером  $i$ , в итоге для  $H_{ij}$  получим соотношения:

$$\begin{aligned} H_{11} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ 2(a_1 d_{11} + a_n d_{n1}) - \sum_{j=2}^{n-1} a_j \operatorname{ctg} \frac{\gamma_j}{2} \right], \quad H_{1n} = -\frac{1}{\pi} (a_1 d_{1n} + a_n d_{nn}), \\ H_{1j} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ 2(a_1 d_{1j} + a_n d_{nj}) + a_j \operatorname{ctg} \frac{\gamma_j}{2} \right], \quad j = 2, \dots, n-1, \\ H_{ij} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ 2a_i d_{ij} + a_j \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma_j - \gamma_i}{2} \right) \right], \quad i = \overline{2, n-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \\ H_{ii} &= -\frac{1}{2\pi} \left[ 2a_i d_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_j \operatorname{ctg} \left( \frac{\gamma_j - \gamma_i}{2} \right) \right], \quad i = \overline{2, n-1}, \quad j = \overline{1, \dots, n}, \quad i = j, \\ H_{nj} &= H_{1j}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

В дискретной форме уравнения (20), (23), (24) примут вид:

$$\alpha_a = \alpha - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n a_j \tau_j, \quad (26)$$

$$\varepsilon \frac{\pi}{2} + \left( \frac{3-\varepsilon}{2} \right) \gamma_i - \tau_i = F \left[ U_0 \left[ \sum_{k=1}^n A_{ik} \left[ \left( 2 \sin \frac{\gamma_k}{2} \right)^{\varepsilon-1} \exp \left( - \sum_{j=1}^n H_{kj} \tau_j \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 4c^2 \Lambda_\infty^2 \cos^2 \left( \frac{\gamma_k}{2} - \alpha \right) \left( 2 \sin \frac{\gamma_k}{2} \right)^{3-\varepsilon} \exp \left( \sum_{j=1}^n H_{kj} \tau_j \right) \right] \right] \right]. \quad (27)$$

$$L = U_0 \left[ \sum_{k=1}^n a_k \left[ \left( 2 \sin \frac{\gamma_k}{2} \right)^{\varepsilon-1} \exp \left( - \sum_{j=1}^n H_{kj} \tau_j \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 4c^2 \Lambda_\infty^2 \cos^2 \left( \frac{\gamma_k}{2} - \alpha \right) \left( 2 \sin \frac{\gamma_k}{2} \right)^{3-\varepsilon} \exp \left( \sum_{j=1}^n H_{kj} \tau_j \right) \right] \right]. \quad (28)$$

Получили систему (26)–(28) из  $n+2$  уравнений относительно  $n+2$  неизвестных:  $\alpha$ ,  $U_0$ ,  $\tau_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Эта система решалась численно методом Ньютона, причем квадратурные коэффициенты  $A_{ij}$ ,  $H_{ij}$  вычисляются до начала итераций. Вид системы (26)–(28) позволяет на каждом шаге итерационного процесса заполнять якобиан системы аналитически, что является основным ресурсом экономии машинного времени. Неравномерная сетка узлов  $\gamma_i$  строилась следующим образом. Исходный профиль задается в виде дискретного множества точек  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (последняя точка совпадает с первой). С помощью численного конформного отображения внешности профиля на внешность круга единичного радиуса эти точки переводятся в точки  $\gamma_i$  параметрической окружности. Тем самым определяется сетка  $\gamma_i$  и находится нулевое приближение

$$\tau_i^0 = \varepsilon \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma_i}{2} (3 - \varepsilon) - \theta_i, \quad i = \overline{1, \dots, n},$$

где  $\theta_i$  – известные углы наклона касательной в точках  $x_i$ ,  $y_i$ . Это нулевое приближение в случае  $c = 0$  (несжимаемой жидкости) будет удовлетворять системе (26)–(28) с очень высокой точностью, определяемой ошибками дискретизации и численного конформного отображения.

#### 4. Результаты числовых расчетов

На рис. 4 показаны распределения приведенных скоростей  $\lambda$  по профилю NASA 2411, рассчитанные при различных числах Маха на бесконечности и различных углах атаки  $\alpha_a$ . Расчеты были проведены по модели газа Чаплыгина (сплошные линии) с помощью CFD пакета FLUENT (пунктирная линия) и по формуле Кармана–Дзяна (штриховая линия). Из приведенных графиков видно, что в докритическом диапазоне чисел Маха все три подхода дают очень близкие распределения. Отличия наблюдаются лишь для критических значений чисел Маха на бесконечности. Совершенно аналогичные результаты были получены для профилей NASA 0012 и KLARK K.

Отметим, что формула Кармана–Дзяна также выводится в предположениях газа Чаплыгина, однако при ее выводе не учитываются различия между формами профилей в фиктивном потоке и физической плоскости. Наши численные эксперименты показывают, что для реальных профилей эти различия крайне незначительны, поэтому неудивительно, что формула Кармана–Дзяна дает результат, близкий к полной модели газа Чаплыгина.

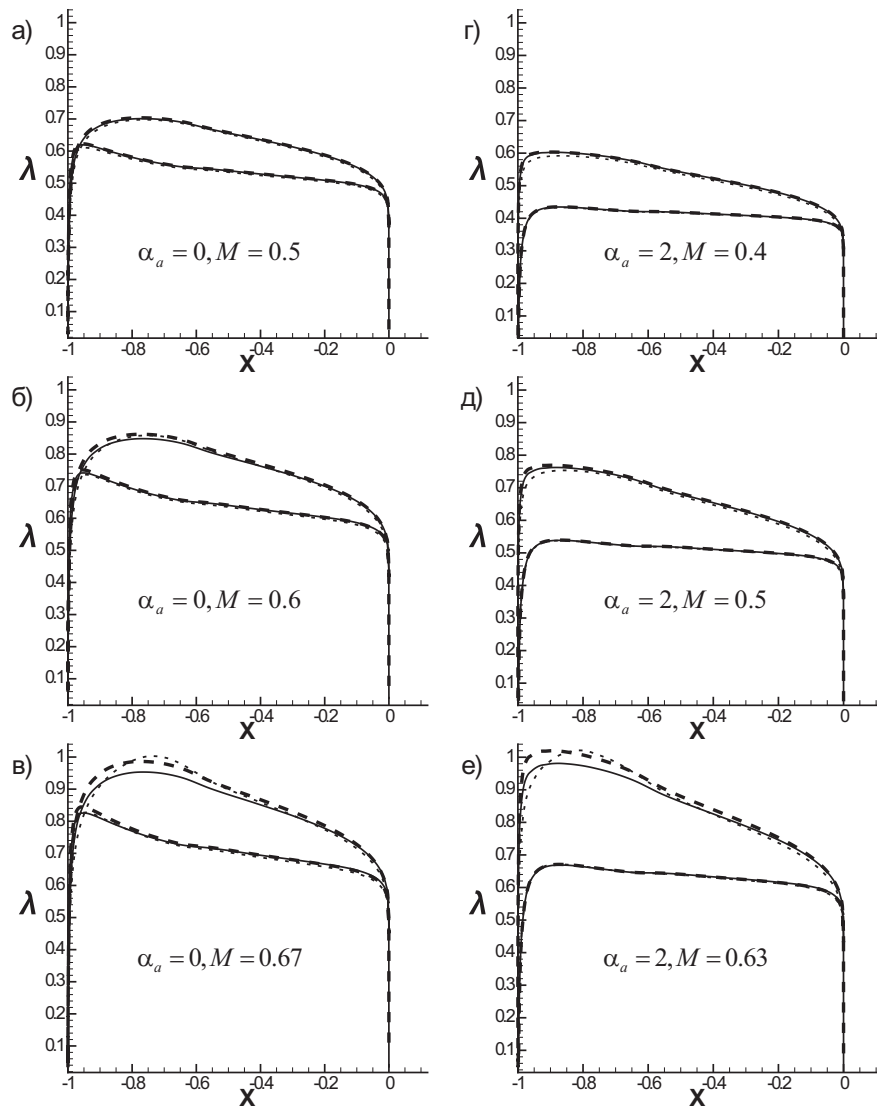


Рис. 4. Распределения приведенной скорости по профилю NACA 2411

Укажем также, что расчет во FLUENT на уже построенной сетке одного распределения приведенной скорости занимает около 3 мин, в то время как расчет по полной модели газа Чаплыгина и по формуле Кармана–Дзяна занимает не более 3 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00996, 12-01-00333).

### Summary

*E.M. Kotlyar, D.V. Maklakov.* Flow past a Profile of a Given Shape in the Chaplygin Gas.

In the paper, the problem of a subsonic continuous flow past a profile of a given shape is investigated. The problem is reduced to a nonlinear Villa-type integral equation, which after discretization is solved by Newton's method. It is shown that the velocity distributions

computed using the Chaplygin gas model, the Karman–Tsien formula and the CFD Fluent package are very close to each other in the subsonic range of Mach numbers.

**Key words:** subsonic flows, Chaplygin equations, Chaplygin gas, Villa's equation, discretization, Newton's method.

### Литература

1. *Чаплыгин С.А.* О газовых струях // Чаплыгин С.А. Полн. собр. соч. – Л.: АН СССР, 1933. – Т. 2. – С. 3–90.
2. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
3. *Сунгурцев Ю.В.* Плоские струйные течения газа. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 256 с.
4. *Тумашев Г.Г.* Нахождение формы профиля по заданному распределению скорости с учетом сжимаемости жидкости // Изв. Казан. физ.-матем. о-ва. Сер. 2. – 1945. – Т. 13. – С. 127–132.
5. *Тумашев Г.Г.* Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1952. – Т. 112, кн. 3. – С. 3–41.
6. *Тумашев Г.Г., Нужин М.Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.
7. *Woods L.C.* The theory of subsonic plane flow. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1961. – 594 p.
8. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980. – 448 с.
9. *Daripa P.K., Sirovich L.* Exact and approximate gas dynamics using the tangent gas // J. Comp. Phys. – 1986. – V. 62, No 2. – P. 400–413.
10. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики: теория и методы проектирования и оптимизации формы крыловых профилей. – М.: Физматлит, 1994. – 436 с.
11. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. – М.: Физматгиз, 1962. – 512 с.
12. *Елизаров А.М., Касимов А.Р., Маклаков Д.В.* Задачи оптимизации формы в аэрогидродинамике. – М.: Физматлит, 2008. – С. 18–29.
13. *Маклаков Д.В.* Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений со свободными границами. – М.: Янус-К, 1997. – 281 с.
14. *de Boor C.* A Practical Guide to Splines. – Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1978. – 346 p.

Поступила в редакцию  
25.11.11

---

**Котляр Евгения Михайловна** – аспирант кафедры аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Kem-vgik@mail.ru*

**Маклаков Дмитрий Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Dmitri.Maklakov@ksu.ru*